

**Exercice N°1**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère les nombres  $a$  et  $b$  définis par  $a = 2n + 3$  et  $b = 5n - 2$ .

1) a/ Montrer que tout diviseur commun  $d$  à  $a$  et  $b$  est un diviseur de  $5a - 2b$ .

b/ En déduire que  $d$  est un diviseur de 19.

2) a/ Montrer que si  $n \equiv 8[19]$  alors  $a \wedge b = 19$ .

b/ Vérifier que si  $n$  n'est pas congru à 8 modulo 19 alors  $2n + 3$  n'est pas divisible par 19.

3) En déduire les valeurs de  $n$  pour les quelles la fraction  $\frac{2n+3}{5n-2}$  est irréductible.

**Exercice N°2**

Une variable aléatoire  $X$  prend les valeurs  $0, 1, \dots, n$  avec les probabilités respectives  $p_0, p_1, \dots, p_n$ .

On pose pour tout réel  $x$  ;

$$g(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n.$$

1) Calculer  $g'(1)$  et  $g''(1)$ .

2) a/ Démontrer que l'espérance mathématique  $E(X) = g'(1)$ .

b/ Démontrer que  $E(X^2) = g'(1) + g''(1)$ .

c/ En déduire  $V(X)$  en fonction de  $g'(1)$  et  $g''(1)$ .

3) On suppose maintenant que  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

a/ Démontrer que pour tout  $x$  réel  $g(x) = (px + 1 - p)^n$ .

b/ Retrouver alors les expressions connues de  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Exercice N°3**

Soit ABCD un carré de centre O tel

que  $(\overline{AB}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ . On désigne  $I = A * B$  et  $J = A * D$

On note  $s$  la similitude directe tels que  $s(D) = O$  et  $s(C) = I$ .

1) a/ Déterminer le rapport et l'angle de  $s$ .

b/ Soit  $\Omega$  le centre de  $s$ . Trouver une construction géométrique de  $\Omega$ .

2) a/ Préciser les images respectives des droite  $(BD)$  et  $(BC)$  par  $s$ .

b/ Déterminer alors  $s(B)$  et  $s(A)$  et  $s(O)$ .

c/ Montrer que  $\Omega$  est le barycentre des points pondérés  $(B, 1)$  et  $(J, 4)$ .

3) On suppose dans cette question que

$(A, \overline{AB}, \overline{AD})$  un repère orthonormé direct du plan.

a/ Déterminer l'application complexe associée à  $s$ .

b/ En déduire l'affixe  $z_0$  de  $\Omega$  centre de  $s$ .

4) Soit  $R$  la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $h = R \circ s$ .

a/ Préciser  $h(B)$  puis caractériser  $h$ .

b/ Soit  $\Omega'$  le milieu de  $[\Omega B]$ . Montrer que  $O\Omega\Omega'$  est rectangle et isocèle.

**Problème**

A- Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère

l'équation différentielle (E) :  $y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

1) On considère une fonction  $G$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $H$  associée à  $G$  par  $H(x) = e^x G(x)$ .

Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $G'(x) + G(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

si et seulement si  $H'(x) = \frac{x^n}{n!}$ .

2) a) Déterminer la fonction  $h$  telle que pour tout réel  $x$ ,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!} \text{ et } h(0) = 0.$$

b) En déduire la fonction  $g$  à laquelle  $h$  est associée.

3) a) Montrer qu'une fonction  $F$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  est solution de l'équation (E) si et seulement si  $F - g$  est solution de l'équation différentielle  $y' + y = 0$ .

b) Résoudre l'équation  $y' + y = 0$ .

c) En déduire la solution générale de l'équation (E).

d) Déterminer la solution  $f$  de (E) telle que  $f(0) = 0$ .

B- Le but de cette partie est de prouver que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e.$$

1) On considère les fonctions  $f_0$  et  $f_1$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f_0(x) = e^{-x}$  et  $f_1(x) = xe^{-x}$

Vérifier que  $f_1$  est solution de l'équation  $y' + y = f_0$

2) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $f_n$  la solution de l'équation différentielle:  $y' + y = f_{n-1}$  qui s'annule en 0.

Montrer par récurrence que pour tout réel  $x$  et tout entier

naturel non nul  $n$ ,  $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$ .

3) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , On pose

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

a) Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$  et

$$\text{que } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

En déduire la limite de  $(I_n)$

b) Montrer que  $I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n!}$

c) Calculer  $I_0$  et en déduire que  $I_n = 1 - \frac{1}{e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

d) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$ .