Exercice N°1

Parmi les réponses proposées, une ou plusieurs sont correctes.

1) Soit f la transformation qui à M(z) associe M'(z') telle que : $z' = 2i\bar{z} - 2 + i$. et Ω(i).

a) f est la similitude indirecte de centre Ω , de rapport 2 et d'axe (OΩ).

b) f n'admet aucun point invariant.

c) $f = h_{(\Omega,\,2)} \circ r_{(\Omega,\,\frac{\pi}{2})} \circ S_{(Oy)}$.

d) l'ensemble des points invariants par f est une droite passant Ω.

e) ΩM' = 2ΩM.

2) Soit s la transformation qui à M(z) associe M'(z') telle que : $z' = \frac{(3+i\sqrt{3})}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. et Ω(2).

a) s admet Ω pour unique point invariant.

b) ΩMM' est rectangle en M.

c) ΩMM' est rectangle en M'.

d) $s \circ r_{(\Omega,\,-\frac{\pi}{6})}$ est une homothétie.

e) $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

3) S est une similitude directe et σ est une similitude indirecte ; on suppose que S et σ coïncident en deux points distincts A et B.

a) S et σ coïncident en tout point du plan.

b) S et σ ont le même rapport.

c) $\sigma^{-1} \circ S$ est égale à l'application identique.

d) $S^{-1} \circ \sigma$ est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

e) S o σ est une symétrie axiale.

Exercice N°2

Déterminer cinq nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5 vérifiant : $z_1z_2z_3z_4z_5 = 4 + 4i$, leurs modules r_1, r_2, r_3, r_4 et r_5 sont en progression géométrique de raison 3 et leurs arguments θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 et θ_5 sont en progression arithmétique de raison π/5 ; $\theta_1 \in [-2\pi/5 , 0]$.

Exercice N°3

1°) Une urne U_1 contient quatre boules rouges et deux boules vertes. Toutes les boules sont supposées indiscernables au toucher.

On tire successivement et sans remise trois boules de U_1.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « une seule, des boules obtenues, est verte »
   B : « Seule la deuxième boule obtenue est verte »
   C : « Obtenir une boule verte pour la première fois au deuxième tirage »

b) Sachant qu'on a obtenu une seule boule verte, quelle est la probabilité pour que cette boule soit obtenue au deuxième tirage ?

2°) On dispose de l'urne U_1 et d'une urne U_2 qui contient une boule rouge et cinq boules vertes.

Une épreuve consiste à tirer deux boules de la manière suivante :

- On tire une boule de U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Lorsqu'on obtient une boule verte, le deuxième tirage est effectué dans la même urne U_1; si non dans l'autre urne U_2.

On désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de boules vertes obtenues.

a) Etablir la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance E(X), la variance V(X) et l'écart type σ(X).

Problème

I. Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1)a) Montrer que f est définie et continue sur D=]-1,1[.

b) Déterminer la fonction dérivée de f.

En déduire la valeur de : $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$.

c) Pour tout x∈D , calculer f(x)+f(-x). Que peut-on déduire ?

2) a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que f est une bijection de D sur R.

c) Montrer que : $\forall x \in R,\ f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

3) Montrer que : si a et b sont des nombres réels, alors : $f^{-1}(a+b) = \frac{f^{-1}(a)+f^{-1}(b)}{1+f^{-1}(a)\times f^{-1}(b)}$.

En déduire que : $\forall (x,y) \in D^2,\ \frac{x+y}{1+xy} \in D$.

4) Soient respectivement C et C' les courbes de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a) Ecrire une équation de la tangente Δ à C au point d'abscisse 0.

b) Etudier le sens de variation de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x)-x$. En déduire la position relative de C par rapport à Δ.

c) Tracer sur une même figure C et C' (unité : 4cm)

II. 1) Soit g une fonction numérique de variable réelle continue, dérivable et strictement monotone sur un intervalle J de R. On note g' sa fonction dérivée sur J et g^{-1} sa fonction réciproque.

a) Expliquer pourquoi g^{-1} admet-elle des primitives sur g(J) .

b) Soit Γ une primitive de g^{-1} sur g(J). Démontrer que Γog est une primitive sur J de la fonction U définie par : U(x)=xg'(x).(x∈J).

c) En déduire que : $\forall(x,y)\in J^2$, $\int_{g(x)}^{g(y)} g^{-1}(t)dt = \int_x^y tg'(t)dt$.

2) f étant la fonction étudiée dans la partie I, et soit x∈D. Calculer $\int_0^x tf'(t)dt$, puis démontrer que :

$\forall y\in R$, on a : $\int_0^y f^{-1}(t)dt = \ln(\frac{e^y+e^{-y}}{2})$.