Exercice N°1

Répondre par vraie ou faux :

1) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = -\frac{1}{2}$ 2) $\int_{-3}^{-1} x^2e^x dx \geq 0$

3) $\int_{-x}^{x} \sqrt{1+t^2}dt = 0$ 4) $\int_0^{-x} t^3e^{\cos t}dt = \int_0^{x} t^3e^{\cos t}dt$

5) $\lim_{x\to+\infty} \ln(\sqrt[3]{x}) - x^2 = -\infty$ 6) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^3} = 0$

7) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$ 8) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3e^x + x^2}{2e^x - x^2} = -\frac{3}{2}$

Exercice N°2

1. Calculer le PGCD de 4^5 - 1 et de 4^6 - 1.
2. Soit U la suite numérique définie par $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.
   Calculer les termes U_2, U_3 et U_4 de la suite U.
3. (a) Montrer que la suite U vérifie, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 4U_n + 1$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, U_n est un entier naturel.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, le PGCD de U_n et U_{n+1}.
4. Soit V la suite définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n + 1/3$.
   (a) Montrer que V est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme V_0.
   (b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   (c) Déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD de 4^{n+1} - 1 et de 4^n - 1.

Exercice N°3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln(\frac{x}{2-x})$. On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé

1°) Montrer que la courbe C admet un centre de symétrie I que l'on précisera.

2°) Etudier les variations de f et tracer C .

3°) Soit t la translation de vecteur : $\vec{u} = (a-1)\vec{i} + \ln a\,\vec{j}$; où a est réel strictement positif.

a) Ecrire une équation cartésienne de courbe C' image de la courbe C de par la translation t.

b) On pose $f_a(x) = \ln(\frac{a+1-x}{a(x+1-a)})$

Montrer que la courbe C_a de f_a est l'image de la courbe C par un antidéplacement φ que l'on caractérisera

Exercice N°4

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB isocèle rectangle en O et de sens direct et on désigne par I le milieu du segment [AB] . On désigne par C le cercle de centre O et de rayon OA, par C le point d'intersection de C avec la demi-droite [IO) et par J le projeté orthogonal de A sur (BC).

1) Soit f la similitude directe de centre A et qui transforme I en O.

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Montrer que le triangle AJC est isocèle rectangle en J.

c) En déduire que f(J) = C

2) On pose: $I' = f^{-1}(I)$.

a) Construire I'.

b) Montrer que les points I, J et I' sont alignés.

3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en J et J en K ; où K est le milieu de [AC].

a) Déterminer le rapport de g.

b) Soit Ω le centre de g. Caractériser gog.

c) Déterminer gog(A) et en déduire que Ω = C.

d) Déterminer l'axe de g.

4) On pose S = gof.

a) Déterminer S(A) et S(J).

b) Montrer que S est une symétrie glissante.

c) Déterminer le vecteur de S et construire son axe Δ.

Exercice N°5

A tout nombre complexe non nul z, on associe dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives z, $\bar{z}$ et $\frac{z^2}{\bar{z}}$.

1) On note r le module de z et θ un argument de z. Exprimer en fonction de r et de θ le module et l'argument de $\bar{z}$ et $\frac{z^2}{\bar{z}}$.

2) Comment faut-il choisir z pour que les points A, B et C soient distincts deux à deux ?

Dans la suite de l'exercice on supposera cette condition réalisée.

3) a) Montrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.

b) Montrer que AB = AC.

c) Le point A étant donné, construire en justifiant les points B et C.

4) a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) \equiv \theta[2\pi]$ ou

$$(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) \equiv \theta + \pi[2\pi]$$

b) En déduire l'ensemble E des points A tel que le triangle ABC soit équilatéral.

Représenter cet ensemble dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.