Lycée Pilote de Tunis $4^{ème}$ Année Math 1-7	DEVOIR DE SYNTHESE N°2	MARS 2014 Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 (3points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.

1.Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Si p est un nombre premier alors $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = 0$

3. Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère la fonction f qui à tout M d'affixe z associe M' d'affixe z' défini par : $z' = -2i\bar{z} + 2 + i$

f est une similitude indirecte de centre W d'affixe i et d'axe Δ d'équation :y=-x+1.

EXERCICEN°2 :(6 points)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x.\ln(1+x^2)$.

Et on désigne par C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1. Dresser le tableau de variation de f .

2 . a. Résoudre dans R l'équation f(x)=x

b. Etudier les positions relatives de C_f et la droite D :y = x .

3. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}

b. Tracer C_f et C_f^{-1} (On précisera la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

4. a. Vérifier que pour tout réel x on a : $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$

c. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations x=0, $x = \sqrt{e-1}$ et les courbes C_f et C_f^{-1}.

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e-1}} f^{-1}(x)\,dx$.

5.On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{e-1}} f(t)e^{\frac{t}{n+1}}\,dt$ ou n un entier naturel

a. Montrer que pour tout entier naturel n : $I_n \geq 0$

b. Prouver que (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c. Montrer que pour tout réel t de $\left[0, \sqrt{e-1}\right]$: $f(t) \leq f(t).e^{\frac{t}{n+1}} \leq f(t).e^{\frac{2}{n+1}}$

d. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \dfrac{1}{2}$

EXRCICE N°3 :(5 points)

1. a. Déterminer deux entiers relatifs x et y tels que : $22x+39y=1$

   b. En déduire un couple (u_0,v_0)solution particulière de l'équation E :$22u+39v=553$

   c. Donner la solution générale de E

2. Soit l'équation (E') d'inconnue rationnelle x : $78x^3+ux^2+vx-22=0$ où u et v sont des entiers relatifs.

   On suppose que $\frac{22}{39}$ est solution de (E') .

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation : $22u+39v=553$

b. Déterminer parmi les couples (u,v) précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

3. Soit $\frac{p}{q}$ une solution rationnelle de l'équation (E')

a. Montrer que si $p \wedge q = 1$ alors p divise 22 et q divise 78.

b. En déduire le nombre de rationnels pouvant être solution de (E') et écrire , parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs

EXERCICE N°4 :(6points)

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre O tel que AB = 6 et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par E le milieu de $[AO]$

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe f telle que f(A) = O et f (B) = E

2. a. Déterminer l'angle et le rapport de f

   b. Construire D'=f(D) puis C'=f (C)

   c. Vérifier que OEC'D' est un carré de sens direct.

3. Soit Ω le centre de la similitude de f

a. Montrer que (Ω,A,O,D) sont situés sur un même cercle C_1

b. Montrer que (Ω,A,B,E) sont situés sur un même cercle C_2

c. En déduire une construction de Ω

4. Soit g l'antidéplacement tel que g(O)=A et g(B)=O.

a. Montrer que g est une symétrie glissante.

b. Donner la forme réduite de g.

5. On pose $\sigma = f^{-1} o g$

a. Montrer que σ est une similitude indirecte et déterminer σ(B) et σ(D')

b. Construire le centre W de σ et son axe Δ