Lycée Ibn Sina
Prof : Mr Ben Jemia Anouar

Devoir de synthèse

Section : Maths
Classe $4^{ème}$
08 Mars 2014

EXERCICE1(3points)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est exacte, justifier laquelle.

1) Soit $f(x) = x\ln(x^2)$ pour $x < 0$. Alors $f'(x)$ est égal à :

a/ $2(1+\ln(x^2))$ b/ $2(1+\ln|x|)$ c/ $\ln(x^2)+\frac{1}{x}$. d/ $\ln(x^2)+\frac{1}{x^2}$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+\ln x}$. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de la courbe constitué par les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses comprises entre 1 et e. Le volume de $\mathscr{V}$ du solide ainsi engendré est :

a/ π b/ πe. c/ $\pi(e-1)$ d/ $\pi(e+1)$

4)vrai ou faux

a/ Soit n un entier. $n\equiv 0(\text{mod}143)$ si et seulement si $n \equiv 0(\text{mod}13)$ et $n\equiv 0(\text{mod}11)$

b/ Soit n un entier. Si $33n\equiv 0(\text{mod}2013)$ alors $n \equiv 0(\text{mod}61)$.

c/ L'équation $33x+11y=2013$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}$.

d/ Si $4x\equiv 5y(\text{mod}5)$ alors $x \equiv 0\ (\text{mod}5)$.

EXERCICE2(6points)

On considère la fonction f définie par: $f(x) = 1+\ln[x(2-x)]$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est 4cm.

1) Etudier les variations de f.

2)

a/Montrer que la droite Δ: $x=1$ est un axe de symétrie pour $\mathscr{C}$.

b/ Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite $(O, \vec{i})$.On notera x_0 la plus petite des abscisses.

3) Soit φ la fonction définie sur $]0,2[$ par: $\varphi(x)=f(x)-x$

a/ Etudier les variations de φ.

b/ En déduire que l'équation $\varphi(x)=0$ admet exactement deux solutions dont l'une est 1 et l'autre sera notée α.

c/ Vérifier que $x_0<\alpha<0{,}3$ et que $\ln[\alpha(2-\alpha)]=\alpha-1$

d/ Préciser le signe de $\varphi(x)$ et en déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite Δ':$y=x$.

4) Tracer $\mathscr{C}$ et Δ.(on prendra $x_0\simeq 0{,}2$)

5) Soit $E=\int_{\alpha}^{1} \ln[x(2-x)]\,dx$.

a/ Montrer que $E=-\alpha(\alpha-1)-2\int_{\alpha}^{1}\frac{1-x}{2-x}\,dx$. En déduire que $E=-\alpha^2+5\alpha-4-2\ln\alpha$

b/ Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par les droites Δ: $x=1$,D :$x=\frac{3}{2}$, la droite $(O, \vec{i})$ et la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE3(3 points)

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$

1) Calculer I_1.

2)

a/ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$;on a $I_n\geqslant 0$.

b/ Montrer que (I_n) est décroissante et déduire qu'elle est convergente.

3)

a/ En utilisant une intégration par partie, Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a:$I_{n+1}=\frac{e^2}{2}-\frac{n+1}{2}I_n$

b/ En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; on a : $\frac{e^2}{n+3}\leqslant I_n\leqslant\frac{e^2}{n+1}$.

c/ Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

EXERCICE4(4points)

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O.On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] , [AD] tel que AI=1et Ω un point du plan.

1) Soit f la similitude directe de centre Ω qui transforme D en O et C en I.
Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de f.

2)

a/ Déterminer f((BD)) et f((BC)).

b/ Déterminer f(B) et justifier que f(A)=J.

c/ Montrer que $fof=h_{(\Omega,-\frac{1}{4})}$. En déduire que Ω est le barycentre des points pondérés (B,1) et (J,4))

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(A,\ \overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$.

a/ Déterminer les affixes des points de la figure. En déduire l'affixe de Ω.

b/ Soit g la similitude indirecte telle que g(D)=O et g(C)=I. Déterminer l'expression complexe de g

c/ Déterminer g(B) .

d/ Déduire alors que $g=S_{(OI)}\ o\ f$.

4) Soit Δ l'axe de g. Déterminer dans $(A,\ \overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ})$ une équation cartésienne de Δ .

EXERCICE5(4points)

1)

a/Enoncer le petit théorème de Fermat.

b/ Déterminer le reste modulo 11 de 6^{10} et le reste modulo 5 de 6^4 justifier votre réponse.

c/ En déduire que $6^{40}\equiv 1(\bmod 11)$ et $6^{40}\equiv 1(\bmod 5)$.

d/ Montrer que $6^{40}\equiv 1(\bmod 55)$.

2) $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}$.

a/ Montrer que l'équation(E) : $65x-40y=1$ n'admet des solutions dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$.

b/ Montrer que l'équation (E') : $17x-40y=1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$.

3)

a/ Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide une solution particulière de (E').

b/ Résoudre l'équation (E') dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$.

c/ En déduire l'inverse modulo 40 de 17